

Algorithmme

Plan du T.P.

1	Consonances	4
2	Al-Khwārizmī	5
3	Euclide	5
4	L'Algorithmme d'Euclide	6
4.1	Manipuler	6
4.2	Verbaliser	6
4.3	Abstraire	8

[Retour au sommaire](#)



Muhammad Al-Khwārizmī, ~ 780 – 850, Khiva – Bagdad

1 Consonances

En musique, une consonance ⁽¹⁾ est une combinaison de sons, tel un accord, perçue comme agréable à l'oreille. En linguistique, une consonance désigne la sonorité particulière d'un mot ou d'une phrase dans une langue étrangère, qui permet parfois de déterminer celle-ci.

Les Mathématiques conservent précieusement deux sonorités intimement liées à Al-Khwārizmī ⁽²⁾ :

- **Al-Khwārizmī ~ Algorithmme**

Al-Khwārizmī a été latinisé en Algorithmi ou Algorizmi,

- **Al-jabr ~ Algèbre**

Son plus célèbre ouvrage, *Kitābu al mukhtasar fī hisābi al jabr wa al muqābalah*, *Abrégé de calcul par la restauration et la comparaison*, est considéré comme le premier manuel d'Algèbre.

(1). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Consonance>

(2). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Al-Khwarizmi>

2 Al-Khwārizmī

Muhammad Ibn Mūsā al-Khuwārizmī, généralement appelé Al-Khwarizmi, né dans les années 780. Il est originaire de Khiva, dans l'actuel Ouzbékistan, et meurt vers 850 à Bagdad. Il est mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse ⁽³⁾ de Bagdad. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie des Abbassides ⁽⁴⁾.

Son ouvrage *Abrégé de calcul par la restauration et la comparaison*, traduit en latin à partir du XII^{ème} siècle, a contribué à l'introduction de l'algèbre en Europe.

Dans un autre ouvrage, *Le livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien*, il reprend le système de numération décimal des mathématiciens indiens (notamment Brahmagupta). Ces travaux et leur diffusion jusqu'en Europe, durant la fin du Moyen-Age et la Renaissance, déboucheront sur ce que nous appelons aujourd'hui les chiffres arabes.

Ses travaux vont permettre par ailleurs d'établir des modes de calculs élaborés de l'impôt, de l'arpentage des terres ou encore des transaction commerciales.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme. Al-Khwarizmi joue un rôle déterminant dans l'avènement du concept d'algorithme, mais ne revendique pas son invention : un millénaire plus tôt, Euclide ⁽⁵⁾ décrivait déjà l'algorithme d'Euclide.

3 Euclide



Euclide, ~ -300, Grèce Antique

Pour mieux appréhender cette notion d'algorithme, nous quitterons quelques instants Al-Khwarizmi et la Civilisation Arabe du Moyen-Age pour nous tourner vers Euclide, et l'Antiquité Grecque.

L'œuvre titanesque d'Euclide porte sur la géométrie, l'axiomatisation, la démonstration. Il écrit en particulier *Les Éléments*, une œuvre constituée de treize livres, qui constitue un texte fondateur des Mathématiques.

(4). https://fr.wikipedia.org/wiki/Maison_de_la_sagesse

(4). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Abbassides>

(5). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide>

4 L'Algorithme d'Euclide

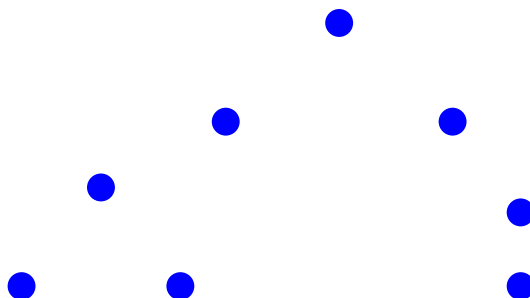
Dans le livre VII des *Éléments*, Euclide décrit pour la première fois l'Algorithme d'Euclide ⁽⁶⁾.

4.1 Manipuler

Exercice 1 :

Comment partager équitablement 8 objets insécables entre 3 parties ?

- a. Représenter, sur le schéma ci-dessous, les 3 parts égales, de chacune des 3 parties ⁽⁷⁾.



- b. Combien de pierres a reçues chaque partie ?

.....

- c. Restera-t-il des objets non attribués à l'issue du partage ?

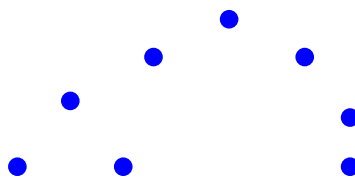
.....

4.2 Verbaliser

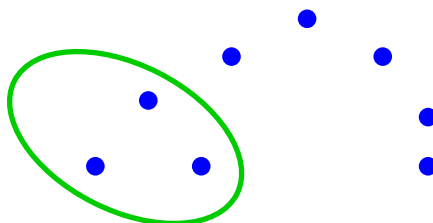
Verbaliser ⁽⁸⁾, c'est exprimer sous forme de mots. Nous allons ainsi tenter de décrire, en mots et en images, le travail réalisé ci-dessus.

Nous pourrions ici imaginer, dans des temps très anciens, des partages de bêtes entre bergers, des partages de recettes entre commerçants ...

Comment répartir équitablement 8 pierres précieuses, identiques et insécables, entre 3 parties ? Nous nous placerons **du point de vue de celui qui réalise le partage** :



L'idée est celle de la distribution des cartes dans un jeu. Donnons une pierre à chaque partie : nous prélevons ainsi 3 pierres de la collection :

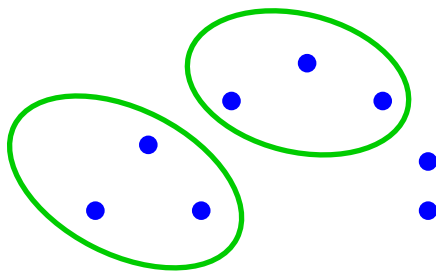


(6). https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_d'Euclide

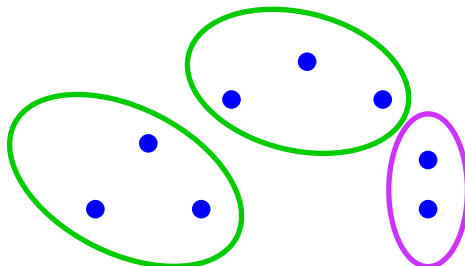
(7). **Partie** : personne ou groupe participant à une discussion (les parties en présence, la partie adverse ...).

(8). **Verbaliser** : exprimer sous forme de mots.

Donnons à nouveau une pierre à chacun, nous prélevons ainsi un second paquet de 3 pierres :

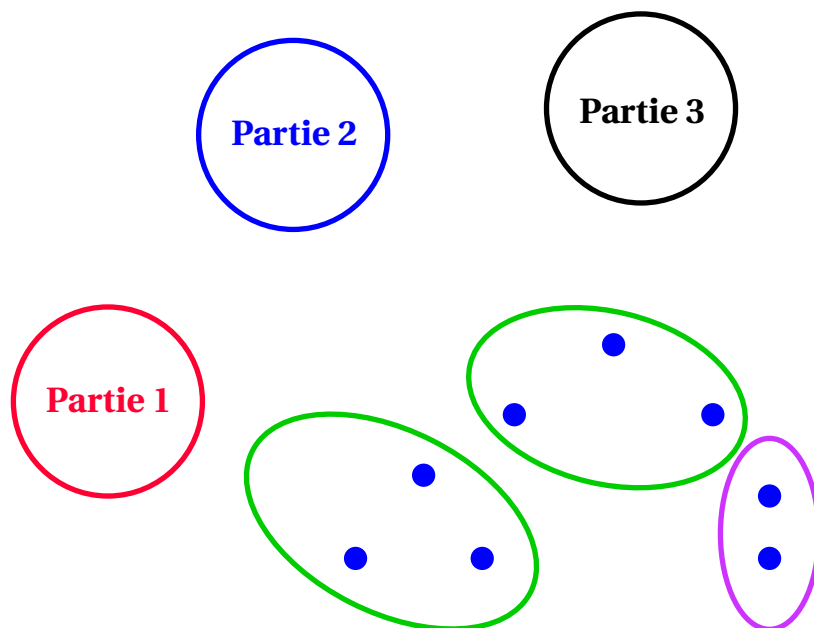


Nous ne pouvons plus constituer de paquet supplémentaire de 3 unités, il restera donc 2 pierres non attribuées :



Exercice 2 :

- a. Entourer sur le schéma ci-dessous :
- **En Rouge** : les pierres reçues par la partie 1.
 - **En Bleu** : les pierres reçues par la partie 2.
 - **En Noir** : les pierres reçues par la partie 3.



- b. Tracer avec les mêmes couleurs, 3 arcs de cercles ne se coupant pas et reliant : en rouge, les deux pierres de la partie rouge, en bleu, les deux pierres de la partie bleue et en noir, les deux pierres de la partie noire.

Définition :

- Le nombre maximal de paquets de 3 unités que nous avons pu prélever parmi les 8 objets s'appelle le **quotient** de la division euclidienne de 8 par 3. Il correspond ici au nombre de pierres reçues par chaque parties.
- Le nombre d'unités restantes, après avoir enlevé à 8, autant de paquets de 3 unités que possible s'appelle le **reste** de la division euclidienne de 8 par 3.

Exercice 1 :

Compléter l'algorithme de partage de 8 pierres entre 3 parties que nous venons de voir :

```

• pierres = 8
• distribution = 0
• Tant que pierres ..... :
    distribution = distribution + 1
    pierres = .....

```

4.3 Abstraire

Vous avez sûrement déjà rencontré le mot "abstraire". Par exemple : "abstraction faite de demain, je suis libre tous les jours." Cela revient à dire : "mis à part demain, je suis libre tous les jours." Nous avons ainsi séparé la journée de demain des autres.

Abstraire, c'est séparer, ou isoler, un élément de son contexte ou de l'ensemble dont il fait partie pour l'étudier ou le généraliser.

Nous tenterons ici d'abstraire le concept de division euclidienne du contexte des pierres précieuses. Puis nous tenterons de le généraliser en passant des nombres 8 et 3, à des nombres entiers naturels a et b quelconques.

Exercice 2 :

a. Compléter l'algorithme de division euclidienne de 8 par 3 :

```

• reste = 8
• quotient = 0
• Tant que reste ..... :
    quotient = quotient + 1
    reste = .....

```

b. Considérons maintenant deux entiers naturels a et b tels que $b \neq 0$.
Compléter l'algorithme de division euclidienne de a par b :

```

• reste = a
• quotient = 0
• Tant que reste ..... :
    quotient = quotient + 1
    reste = .....

```

Division euclidienne

Réaliser la division euclidienne de a par b revient à se demander :

- dans a , combien de fois, au maximum, peut-on enlever b ?
- combien d'unités restera-t-il alors ?

Définition :

- Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est trouver les deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

- Le nombre q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de a par b .
- Le nombre r est appelé le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Algorithme

Nous venons de voir un algorithme permettant d'obtenir le nombre d'objets à donner à chacun lors du partage équitable de 8 objets entre 3 parties.

Définition :

- Un **algorithme** ⁽⁹⁾ est une suite finie d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre un problème ou d'obtenir un résultat.

Étymologie :

- Le mot **algorithme** vient du mathématicien perse **Al-Khwārizmī** ($\approx 780 - 850$), dont le nom a été latinisé en Algorithmi ou Algorizmi.

Verbaliser et abstraire

Définition :

- **Verbaliser** signifie exprimer à l'aide du langage.

Définition :

- **Abstraire** signifie isoler un élément de son contexte ou de l'ensemble dont il fait partie pour l'étudier ou le généraliser.

(9). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme>

(9). <https://fr.wikipedia.org/wiki/Étymologie>